Dipartimento di Scienze Statistiche

Analisi Matematica

Lezione 22, 17 novembre 2014

Funzioni derivabili in un intervallo

prof. Daniele Ritelli

daniele.ritelli@unibo.it

Teorema di Darboux

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile non si può, a priori dedurre che la derivata $f' : I \to \mathbb{R}$ sia continua. Ad esempio

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile in ogni punto. La sua derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

non è una funzione continua nell'origine.

Nonostante non si possa a priori dire che la funzione derivata $f' : I \to \mathbb{R}$ sia continua, f' mantiene la proprietà dei valori intermedi.

Nonostante non si possa a priori dire che la funzione derivata $f' : I \to \mathbb{R}$ sia continua, f' mantiene la proprietà dei valori intermedi.

Teorema

Se $f : I \to \mathrm{R}$ è una funzione derivabile, presi $a, b \in I$ tali che $a < b$ e che $f'(a) < f'(b)$, allora per ogni reale k tale che $f'(a) < k < f'(b)$ esiste almeno un punto $x \in]a, b[$ tale per cui $f'(x) = k$

Dimostrazione

Sia $g(x) = f(x) - kx$, g soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass in $[a, b]$.

Dimostrazione

Sia $g(x) = f(x) - kx$, g soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass in $[a, b]$. Se x_m è punto di minimo di g, siccome $g'(a) = f'(a) - k < 0$ e $g'(b) = f'(b) - k > 0$ tale punto di minimo deve essere interno all'intervallo,

Dimostrazione

Sia $g(x) = f(x) - kx$, g soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass in $[a, b]$. Se x_m è punto di minimo di g, siccome $g'(a) = f'(a) - k < 0$ e $g'(b) = f'(b) - k > 0$ tale punto di minimo deve essere interno all'intervallo, dunque, per il teorema di Fermat deve essere $g'(x_m) = 0$, dunque $f'(x_m) = k$

Osservazione

La funzione f' non può presentare discontinuità di tipo salto in $]a, b[$. In particolare, se una funzione ha in un intervallo derivata sempre diversa da zero, si ha che il segno della derivata non cambia. In altri termini $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in I$ equivale a ipotizzare che o $f'(x) < 0$ o $f'(x) > 0$ per ogni per ogni $x \in I$.

Teorema di Cauchy

Se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue su $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$ si ha che esiste un elemento $\xi \in \,]a, b[$ tale che:

$$[f(b) - f(a)]\, g'(\xi) = [g(b) - g(a)]\, f'(\xi)$$

Usando il teorema di Darboux il teorema di Cauchy può essere enunciato anche in questo modo

Se $f,\ g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue su $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$ e se $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in \,]a, b[$ si ha che esiste un elemento $\xi \in \,]a, b[$ tale che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Teorema della monotonia e segno

Se $f'(x) > 0$, per ogni $x \in I$ allora f è strettamente crescente in I.

Teorema della monotonia e segno

Se $f'(x) > 0$, per ogni $x \in I$ allora f è strettamente crescente in I.

Dimostrazione Siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$.

Teorema della monotonia e segno

Se $f'(x) > 0$, per ogni $x \in I$ allora f è strettamente crescente in I.

Dimostrazione Siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange sappiamo che esiste $x \in \,]x_1, x_2[$ tale che:

Teorema della monotonia e segno

Se $f'(x) > 0$, per ogni $x \in I$ allora f è strettamente crescente in I.

Dimostrazione Siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange sappiamo che esiste $x \in \,]x_1, x_2[$ tale che:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)\,(x_2 - x_1)$$

Teorema della monotonia e segno

Se $f'(x) > 0$, per ogni $x \in I$ allora f è strettamente crescente in I.

Dimostrazione Siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange sappiamo che esiste $x \in]x_1, x_2[$ tale che:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)\,(x_2 - x_1)$$

Per ipotesi $f'(x) > 0$,

Teorema della monotonia e segno

Se $f'(x) > 0$, per ogni $x \in I$ allora f è strettamente crescente in I.

Dimostrazione Siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange sappiamo che esiste $x \in \,]x_1, x_2[$ tale che:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)\,(x_2 - x_1)$$

Per ipotesi $f'(x) > 0$, d'altra parte anche $x_2 - x_1 > 0$, quindi

Teorema della monotonia e segno

Se $f'(x) > 0$, per ogni $x \in I$ allora f è strettamente crescente in I.

Dimostrazione Siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Per il teorema di Lagrange sappiamo che esiste $x \in]x_1, x_2[$ tale che:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)\,(x_2 - x_1)$$

Per ipotesi $f'(x) > 0$, d'altra parte anche $x_2 - x_1 > 0$, quindi

$$f(x_2) > f(x_1)$$

Ricerca di massimi e minimi

$$f'(x) > 0 \text{ per } x > x_0, f'(x) < 0 \text{ per } x < x_0 \Rightarrow x_0 \text{ min rel}$$

Ricerca di massimi e minimi

$$f'(x) > 0 \text{ per } x > x_0, f'(x) < 0 \text{ per } x < x_0 \Rightarrow x_0 \text{ min rel}$$

$$f'(x) < 0 \text{ per } x > x_0, f'(x) > 0 \text{ per } x < x_0 \Rightarrow x_0 \text{ max rel}$$

Teorema della derivata nulla

Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$, allora f è costante.

Teorema della derivata nulla

Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$, allora f è costante.

Dimostrazione.

Si ha, per il teorema di Lagrange, che:

Teorema della derivata nulla

Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$, allora f è costante.

Dimostrazione.

Si ha, per il teorema di Lagrange, che:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)\,(x_2 - x_1) = 0$$

Teorema della derivata nulla

Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$, allora f è costante.

Dimostrazione.

Si ha, per il teorema di Lagrange, che:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)\,(x_2 - x_1) = 0$$

dunque f è costante.

Teorema della derivata nulla

Se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in I$, allora f è costante.

Dimostrazione.

Si ha, per il teorema di Lagrange, che:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)\,(x_2 - x_1) = 0$$

dunque f è costante.

Corollario

Se $f'(x) = g'(x)$ per ogni $x \in I$, allora esiste un numero reale c tale per cui

$$f(x) = g(x) + c.$$

Esempio di determinazione di massimi e minimi

Sia $f(x) = x^2 e^x$.

Esempio di determinazione di massimi e minimi

Sia $f(x) = x^2 e^x$. Si ha:

Esempio di determinazione di massimi e minimi

Sia $f(x) = x^2\, e^x$. Si ha:

$$f'(x) = 2xe^x + x^2\, e^x$$

Esempio di determinazione di massimi e minimi

Sia $f(x) = x^2 e^x$**. Si ha:**

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = x(2+x)\, e^x$$

Esempio di determinazione di massimi e minimi

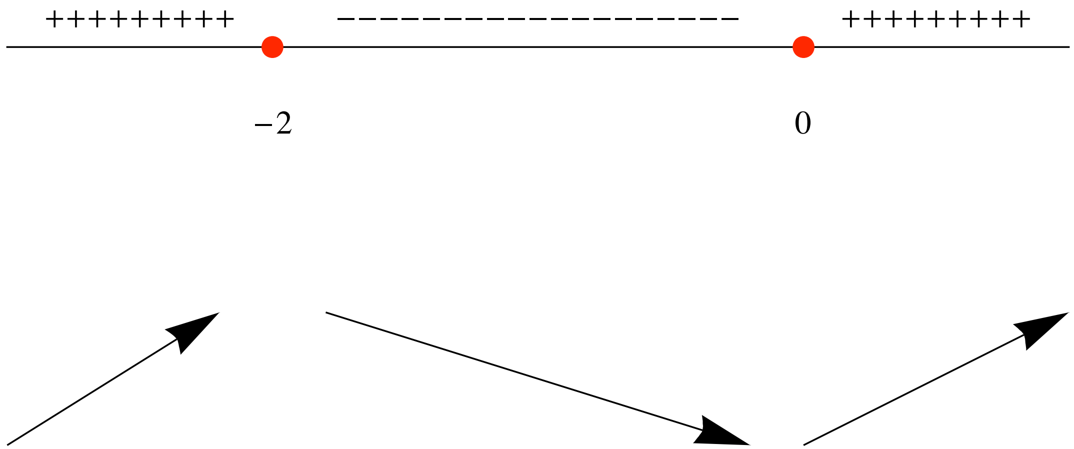
Sia $f(x) = x^2\, e^x$. Si ha:

$$f'(x) = 2xe^x + x^2\, e^x = x(2+x)\, e^x > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ e } x > 0$$

Esempio di determinazione di massimi e minimi

Sia $f(x) = x^2\, e^x$. Si ha:

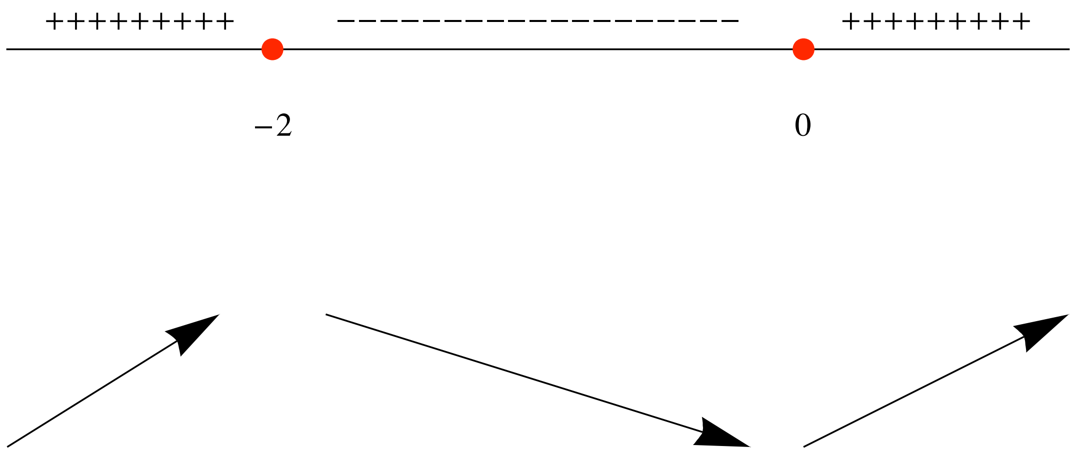
$$f'(x) = 2xe^x + x^2\, e^x = x(2+x)\, e^x > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ e } x > 0$$



Esempio di determinazione di massimi e minimi

Sia $f(x) = x^2\, e^x$. Si ha:

$$f'(x) = 2xe^x + x^2\, e^x = x(2+x)\, e^x > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ e } x > 0$$

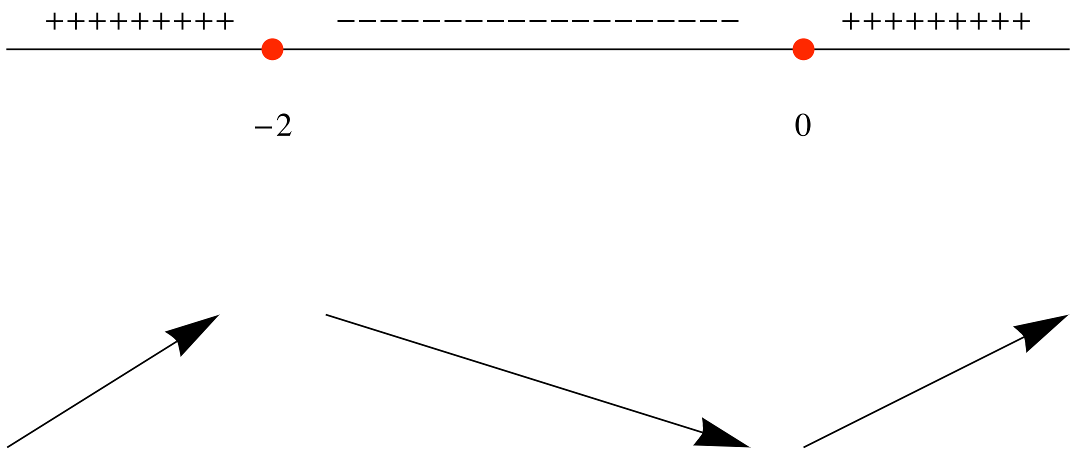


$x_m = 0$ è minimante. Il valore dell'estremo è $f(0) = 0$

Esempio di determinazione di massimi e minimi

Sia $f(x) = x^2 e^x$. Si ha:

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = x(2+x)\,e^x > 0 \Leftrightarrow x < -2 \text{ e } x > 0$$



$x_m = 0$ è minimante. Il valore dell'estremo è $f(0) = 0$

$x_M = -2$ è massimante il valore dell'estremo è $f(-2) = 4e^{-2}$

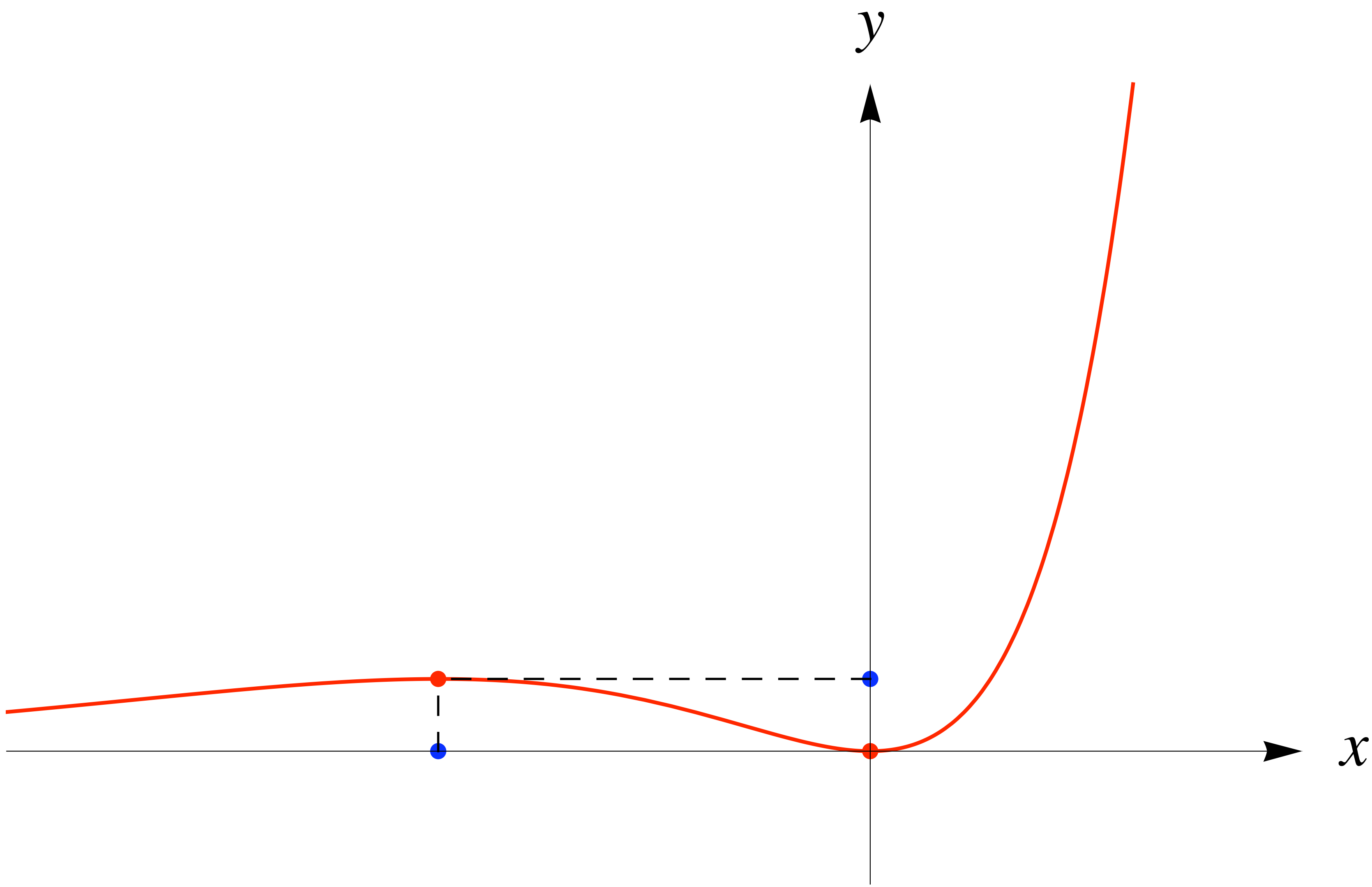


Figure 1: $f(x)$ assi non monometrici

Esercizio

La funzione $f(x) = |x|\, 2^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$

1. ha minimo assoluto in $x = 0$ e massimo assoluto in $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\ln 4}}$
2. non ha mimino in x perché non è ivi derivabile
3. ha massimo assoluto in in $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\ln 4}}$ ma non minimo assoluto perché $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$
4. ha minimo assoluto in $x = 0$ e massimo assoluto in $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\ln 8}}$
5. ha minimo assoluto in $x = 0$ e massimo assoluto in $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\ln 16}}$

Esercizio

Stabilire al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazion

$$1 + x^2 = \lambda \left(1 + x^4\right)$$

Esercizio

Stabilire al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazion

$$1 + x^2 = \lambda\left(1 + x^4\right)$$

$$\lambda = \frac{1 + x^2}{1 + x^4}$$

Esercizio

Stabilire al variare di $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazion

$$1 + x^2 = \lambda \left(1 + x^4\right)$$

$$\lambda = \frac{1 + x^2}{1 + x^4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1 + x^2}{1 + x^4}\right) = -\frac{2x\left(x^4 + 2x^2 - 1\right)}{\left(1 + x^4\right)^2}$$

Esercizio

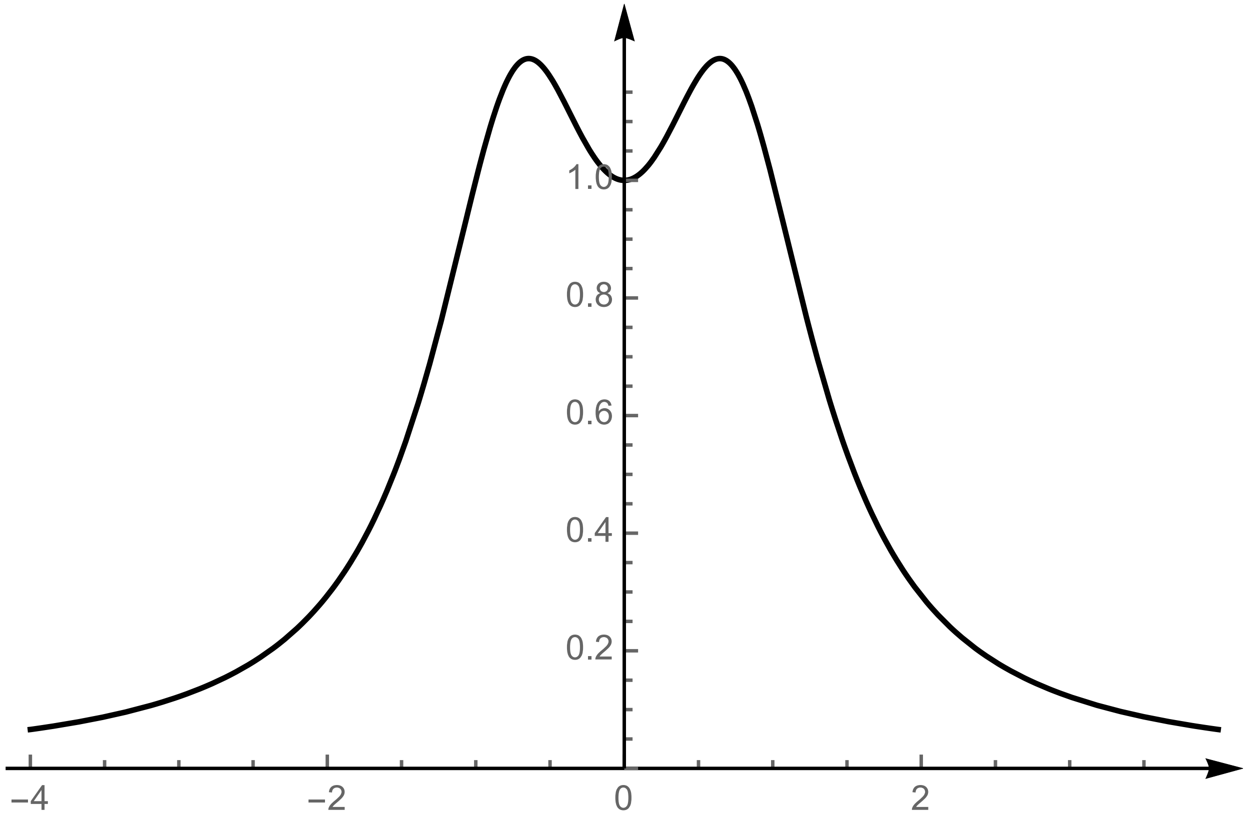
Stabilire al variare di $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazion

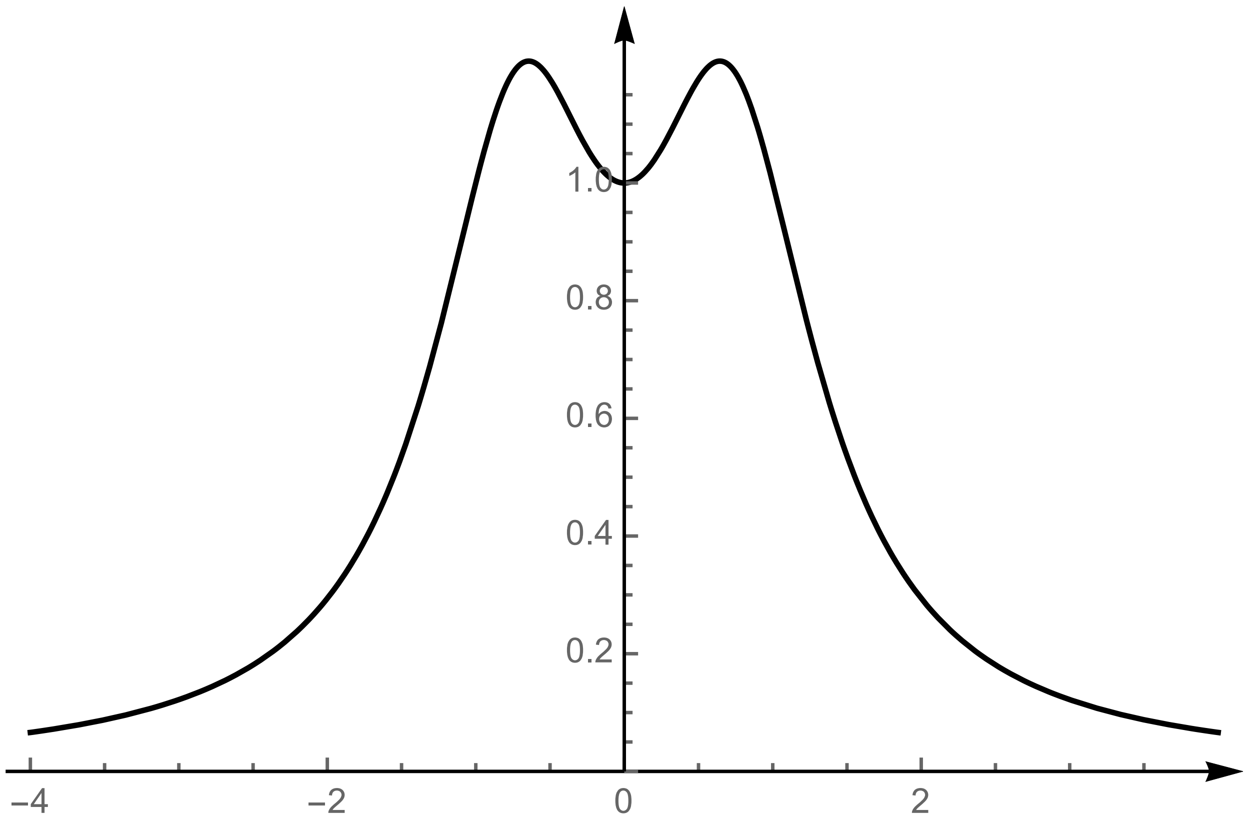
$$1 + x^2 = \lambda \left(1 + x^4\right)$$

$$\lambda = \frac{1 + x^2}{1 + x^4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1 + x^2}{1 + x^4}\right) = -\frac{2x\left(x^4 + 2x^2 - 1\right)}{\left(1 + x^4\right)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1 + x^2}{1 + x^4}\right) = -\frac{2x\left(x^2 + 1 + \sqrt{2}\right)\left(x^2 + 1 - \sqrt{2}\right)}{\left(1 + x^4\right)^2}$$


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
−4
−2
0
2



$$\max_{x\in\mathbb{R}} \frac{1+x^2}{1+x^4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Esercizio **Studiare al variare dei parametri $p > 0$, $q \in \mathbb{R}$ il numero delle radici reali dell'equazione:**

$$x^3 - 3p^2x + 2q^3 = 0.$$

Esercizio Studiare al variare dei parametri $p > 0$, $q \in \mathbb{R}$ il numero delle radici reali dell'equazione:

$$x^3 - 3p^2x + 2q^3 = 0.$$

Poniamo $f(x) = x^3 - 3p^2x + 2q^3$. Si ha $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Poi:

$$f'(x) = 3\left(x^2 - p^2\right) \geq 0 \text{ se e solo se } x \leq -p \vee x \geq p.$$

Esercizio Studiare al variare dei parametri $p > 0$, $q \in \mathbb{R}$ il numero delle radici reali dell'equazione:

$$x^3 - 3p^2 x + 2q^3 = 0.$$

Poniamo $f(x) = x^3 - 3p^2 x + 2q^3$. Si ha $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Poi:

$$f'(x) = 3\left(x^2 - p^2\right) \geq 0 \text{ se e solo se } x \leq -p \vee x \geq p.$$

Quindi $x_M = -p$ è punto di massimo relativo con ordinata $y_M = 2p^3 + 2q^3$, mentre $x_m = p$ è punto di minimo relativo con ordinata $y_m = -2p^3 + 2q^3$.

Se l'ordinata del massimo è negativa $q < -p$ abbiamo una sola soluzione reale

Se l'ordinata del massimo è negativa $q < -p$ abbiamo una sola soluzione reale

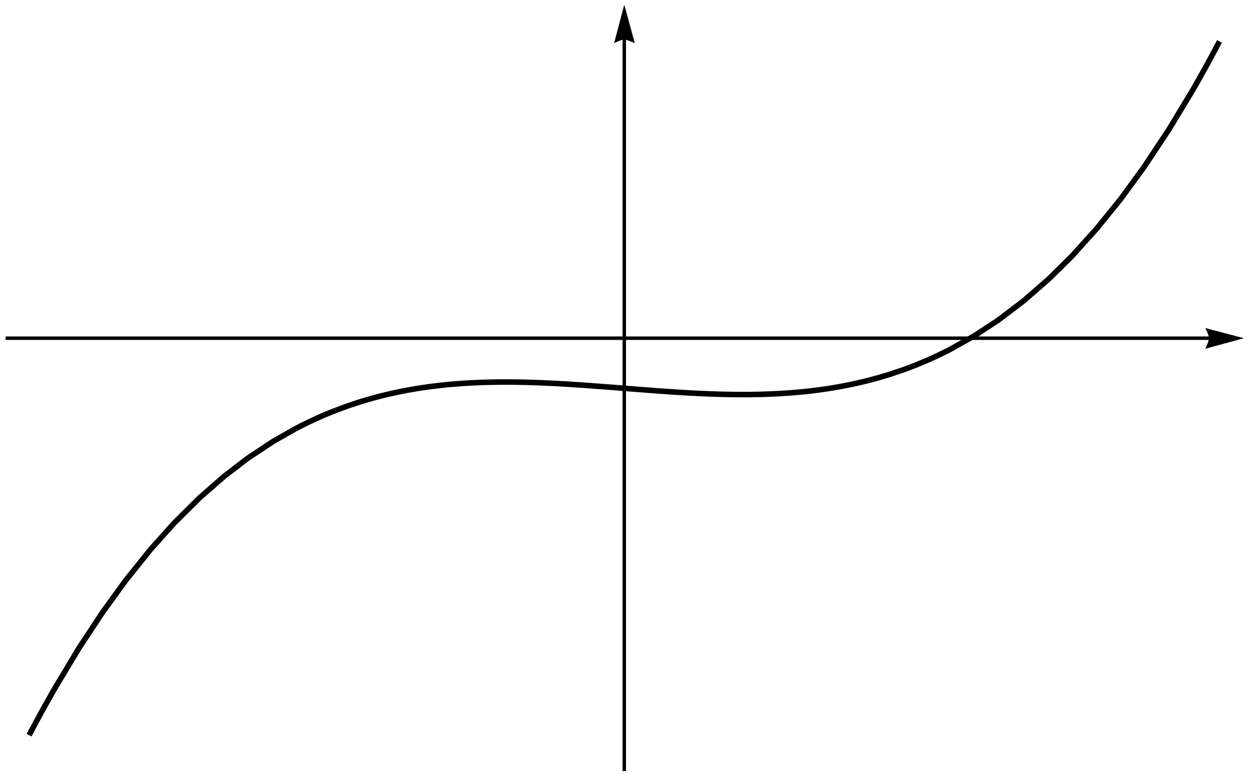


Figure 2: $q < -p$

Se l'ordinata del minimo è positiva $q > p$ abbiamo una sola soluzione reale

Se l'ordinata del minimo è positiva $q > p$ abbiamo una sola soluzione reale

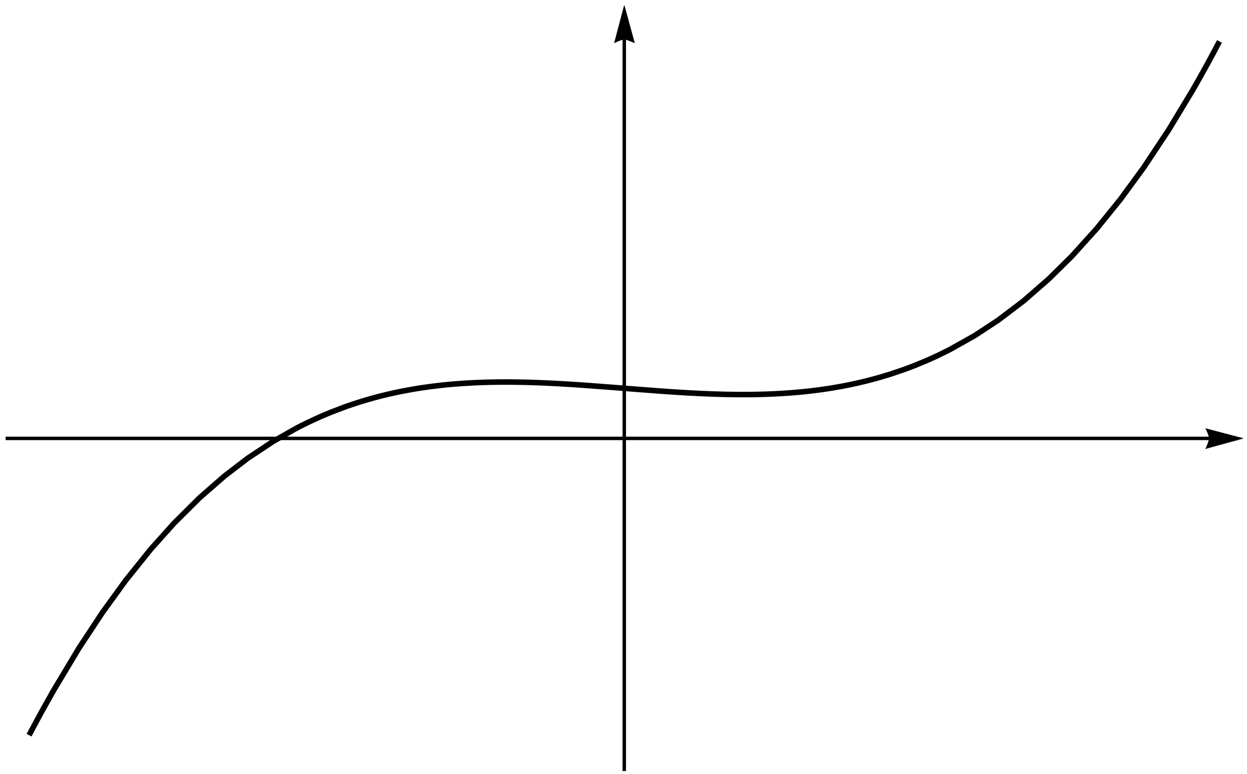


Figure 3: $q > p$

Se l'ordinata del massimo è positiva e quella del minimo negativa $-p < q < p$ abbiamo tre soluzioni reali

Se l'ordinata del massimo è positiva e quella del minimo negativa $-p < q < p$ abbiamo tre soluzioni reali

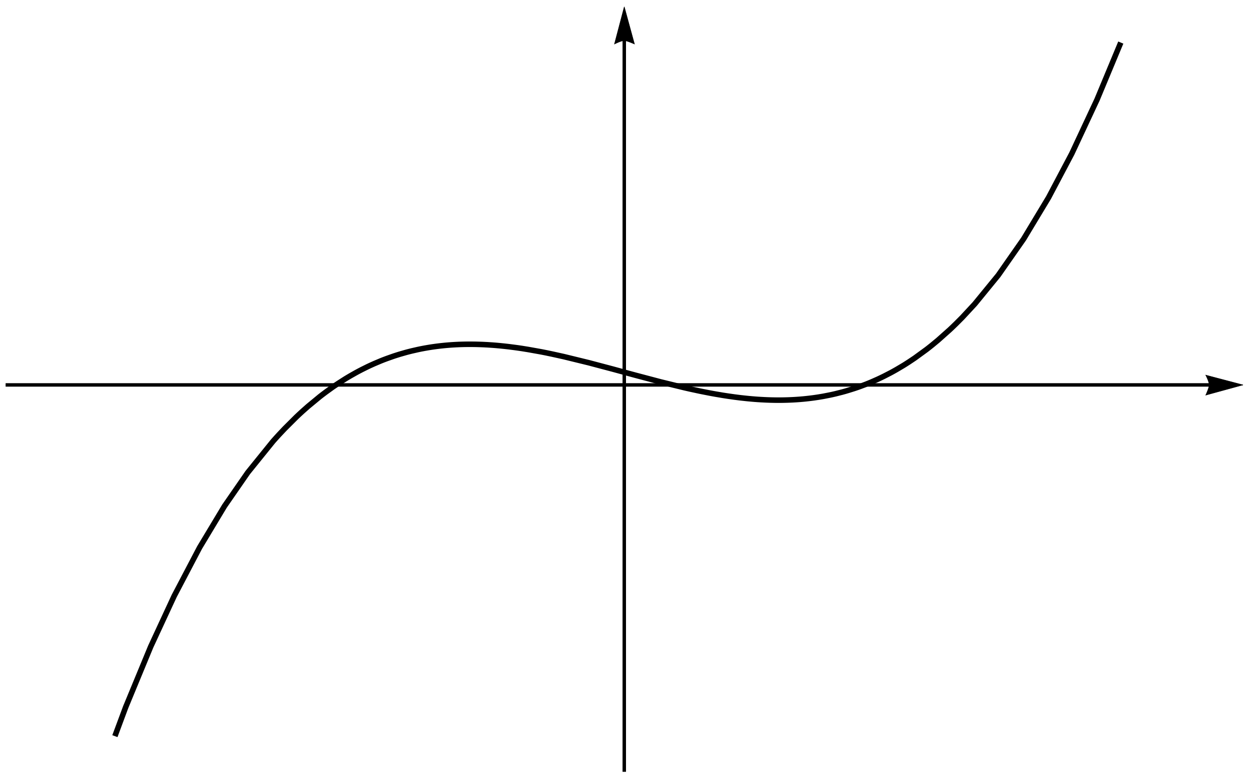


Figure 4: $-p < q < p$

Se $\boldsymbol{q = \pm p}$ abbiamo una radice doppia

Se $q = \pm p$ abbiamo una radice doppia

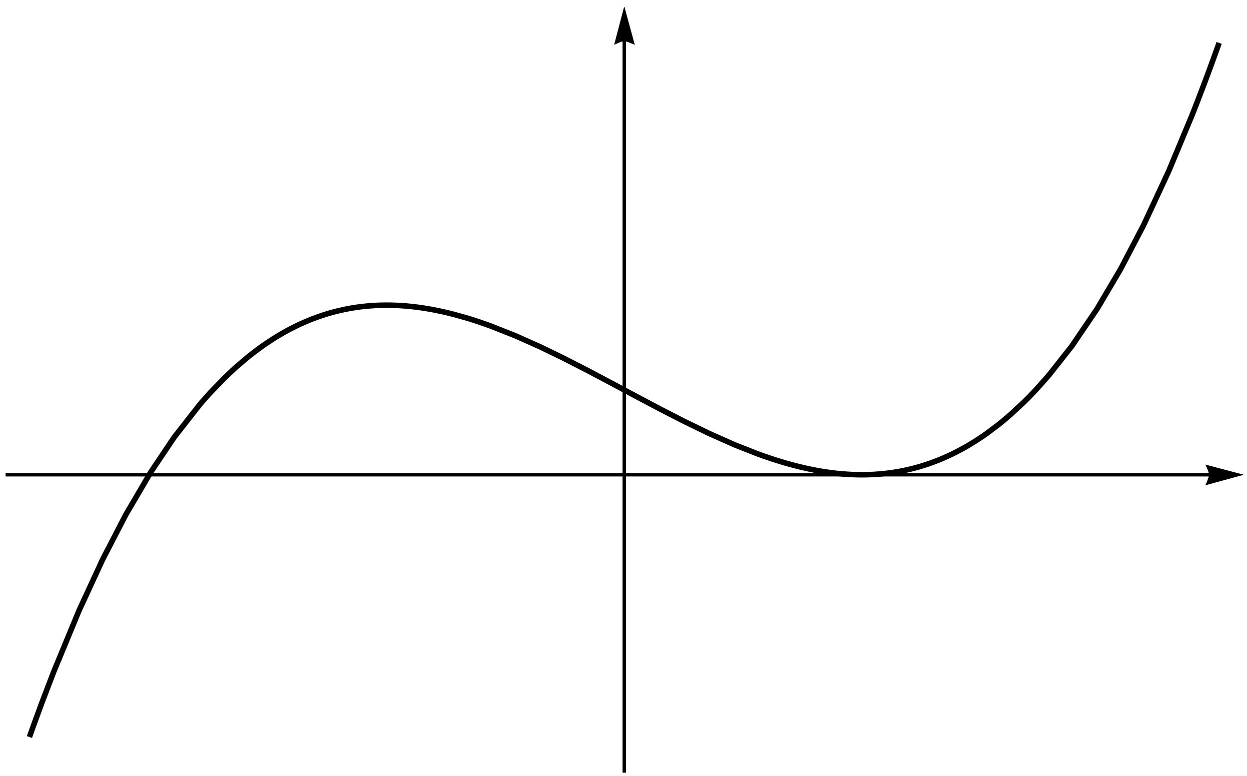


Figure 5: $q = \pm p$